Applications sur les vecteurs

Prérequis

Ce cours suppose que vous maîtrisez les notions de base sur les vecteurs : définition, représentation graphique, opérations (addition, soustraction, multiplication par un scalaire), coordonnées d'un vecteur dans un repère. Ce chapitre s'inscrit dans la continuité de l'introduction aux vecteurs et précède l'étude des produits scalaires et vectoriels. Il est conseillé d'avoir une bonne maîtrise des équations et inéquations du premier degré.

Chapitre 1 : Vecteurs et Géométrie

1.1 Coordonnées et Vecteurs

On considère un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Un vecteur $\vec{u}$ est défini par ses coordonnées (x,y) dans ce repère. On note $\vec{u}(x,y)$. On peut exprimer $\vec{u}$ en fonction des vecteurs de base : $\vec{u}=xvec\,i+yvec\,j$.

Définition : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Exemple : Si $\vec{u}=(2,3)$ et $\vec{v}=(2,3)$, alors $\vec{u}=\vec{v}$.

Remarque : Le vecteur nul est noté $\vec{0}$ et a pour coordonnées $(0,0)$.

1.2 Milieu d'un Segment

Soient $A\left(x_A,y_A\right)$ et $B\left(x_B,y_B\right)$ deux points. Le milieu M du segment $\left[AB\right]$ a pour coordonnées :

$$Mleft\left(\frac{\left(x_A+x_B\right)}{(2)},\frac{\left(y_A+y_B\right)}{(2)}\rightarrow\right)$$

Exemple : Si $A(1,2)$ et $B(5,6)$, alors le milieu M de $\left[AB\right]$ a pour coordonnées $Mleft\left(\frac{(1+5)}{(2)},\frac{(2+6)}{(2)}\rightarrow\right)=M(3,4)$.

1.3 Colinéarité de deux Vecteurs

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}\left(x_u,y_u\right)$ et $\vec{v}\left(x_v,y_v\right)$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k

tel que $\vec{u}=kvec v$. Cela se traduit par : $x_u=kx_v$ et $y_u=ky_v$. Si $\vec{v}neq\vec{0}$, cela équivaut à $\frac{(x_u)}{(x_v)}=\frac{(y_u)}{(y_v)}$.

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}(2,4)$ et $\vec{v}(1,2)$ sont colinéaires car $\frac{(2)}{(1)}=\frac{(4)}{(2)}=2$. On a $\vec{u}=2\vec{v}$.

Chapitre 2 : Applications aux problèmes géométriques

2.1 Déterminer les coordonnées d'un point

Exercice 1 : Soient A(1, 3) et B(4, 1). Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

Corrigé guidé Exercice 1:

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(4-1,1-3)=\overrightarrow{AB}(3,-2)$
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}=2(3,-2)=(6,-4)$
3. On a $\overrightarrow{AC}\left(x_C-x_A,y_C-y_A\right)=(6,-4)$. Donc $x_C-1=6$ et $y_C-3=-4$.
4. On en déduit $x_C=7$ et $y_C=-1$.
5. Les coordonnées de C sont (7, -1)

2.2 Démontrer l'alignement de points

Exercice 2 : Soient A(1,2), B(4,5) et C(7,8). Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Corrigé guidé Exercice 2:

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}=(4-1,5-2)=(3.3)$ et $\overrightarrow{AC}=(7-1,8-2)=(6.6)$
2. Observer que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.
3. Puisque $\overrightarrow{AC}$ est un multiple de $\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
4. Donc, les points A, B, et C sont alignés.

Chapitre 3 : Problèmes de type "barycentre"

Le barycentre de deux points pondérés est un point qui est un intermédiaire entre deux points. Nous n'aborderons pas les propriétés de la fonction vectorielle “barycentre” dans ce chapitre.

Résumé

- **Définition:** Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées.
- **Coordonnées du milieu M d'un segment [AB]:** $Mleft\left(\frac{(x_A+x_B)}{(2)},\frac{(y_A+y_B)}{(2)}\rightarrow\right)$

- **Colinéarité:** Deux vecteurs $\vec{u}\left(x_u, y_u\right)$ et $\vec{v}\left(x_v, y_v\right)$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k vec v$. Cela équivaut à $\frac{\left(x_u\right)}{\left(x_v\right)} = \frac{\left(y_u\right)}{\left(y_v\right)}$ (si $x_v neq 0$ et $y_v neq 0$).
- **Chapitre 1:** Introduction des coordonnées de vecteurs, définition de l'égalité vectorielle, calcul du milieu d'un segment et condition de colinéarité de deux vecteurs.
- **Chapitre 2:** Applications des propriétés vectorielles à la résolution de problèmes géométriques, notamment la détermination des coordonnées d'un point et la démonstration de l'alignement de points.
- **Chapitre 3:** Introduction du concept de barycentre, sans approfondissement des propriétés de la fonction vectorielle “barycentre”.