Applications sur les vecteurs

Prérequis

Ce cours nécessite la maîtrise des notions de base sur les vecteurs : définition d'un vecteur, égalité de deux vecteurs, représentation graphique, opérations sur les vecteurs (addition, soustraction, multiplication par un scalaire). Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du chapitre introductif sur les vecteurs et précède l'étude des produits scalaires et vectoriels. Il est généralement abordé au second trimestre de l'année de seconde.

Chapitre 1 : Coordonnées d'un vecteur et applications

1.1 Coordonnées d'un vecteur dans un repère

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, un vecteur $\vec{u}$ peut être décomposé de manière unique sous la forme : $\vec{u}=xvec\,i+yvec\,j$, où x et y sont des nombres réels appelés **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$. On note alors $\vec{u} begin pmatrix\, x \;\; y\, end pmatrix$. x est l'abscisse et y l'ordonnée du vecteur.

Exemple : Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, si $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$, alors les coordonnées de $\vec{u}$ sont $begin pmatrix\, 2 \;\; 3\, end pmatrix$.

1.2 Applications aux problèmes géométriques

Les coordonnées permettent de résoudre facilement des problèmes de géométrie vectorielle.

Exemple 1 : Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment [AB] dont les extrémités A et B ont pour coordonnées respectives A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B).

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $begin pmatrix\, x_B - x_A \;\; y_B - y_A\, end pmatrix$.
- Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $begin pmatrix \frac{\left(x_A+x_B\right)}{(2)} \frac{\left(y_A+y_B\right)}{(2)} end pmatrix$.

Exemple 2 : Montrer que les points A(1,2), B(4,6) et C(7,10) sont alignés.

- Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}=begin pmatrix\, 4-1 \;\; 6-2\, end pmatrix = begin pmatrix\, 3 \;\; 4\, end pmatrix$ et $\overrightarrow{AC}=begin pmatrix\, 7-1 \;\; 10-2\, end pmatrix = begin pmatrix\, 6 \;\; 8\, end pmatrix$.
- On remarque que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

Exercice corrigé 1: Soient A(2, -1) et B(5, 3). Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$.

Correction: $\overrightarrow{AM} = begin pmatrix\, x_M - 2\ \ y_M + 1\, end pmatrix$ et $\overrightarrow{AB} = begin pmatrix\, 5-2\ \ 3-(-1)\, end pmatrix = begin pmatrix\, 3\ \ 4\, end pmatrix$. Donc $begin pmatrix\, x_M - 2\ \ y_M + 1\, end pmatrix = 2\, begin pmatrix\, 3\ \ 4\, end pmatrix = begin pmatrix\, 6\ \ 8\, end pmatrix$. Par conséquent, $x_M = 8$ et $y_M = 7$. Les coordonnées de M sont (8, 7).

Chapitre 2 : Vecteurs et équations de droites

2.1 Vecteur directeur d'une droite

Une droite (D) admet un **vecteur directeur** $\vec{u}$ non nul, tel que si A et B sont deux points quelconques de (D), alors $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

2.2 Équation cartésienne d'une droite

Si $\vec{u}\, begin pmatrix\, a\ \ b\, end pmatrix$ est un vecteur directeur de la droite (D) passant par le point A(x_A, y_A), alors l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $b\left(x - x_A\right) - a\left(y - y_A\right) = 0$.

Remarque : Si $a=0$, l'équation se simplifie en $x=x_A$. Si $b=0$, l'équation se simplifie en $y=y_A$.

Exercice corrigé 2: Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par A(1, 2) et de vecteur directeur $\vec{u}\, begin pmatrix\, 2\ \ -1\, end pmatrix$.

Correction: L'équation cartésienne est donnée par : $-1(x-1)-2(y-2)=0$, ce qui se simplifie en $-x+1-2y+4=0$, soit $x+2y-5=0$.

Chapitre 3 : Applications aux problèmes de physique

Les vecteurs sont omniprésents en physique, notamment pour représenter les forces, les vitesses et les accélérations. L'utilisation des coordonnées permet de simplifier les calculs.

Exemple : Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ s'appliquent sur un point matériel. $\overrightarrow{F_1}\, begin pmatrix\, 3\ \ 4\, end pmatrix$ N et $\overrightarrow{F_2}\, begin pmatrix\, -1\ \ 2\, end pmatrix$ N. Déterminer les coordonnées de la résultante $\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

$\vec{R} = begin pmatrix\, 3+(-1)\ \ 4+2\, end pmatrix = begin pmatrix\, 2\ \ 6\, end pmatrix$ N. La résultante a pour coordonnées $begin pmatrix\, 2\ \ 6\, end pmatrix$ N.

Résumé

- **Vecteur:** grandeur physique caractérisée par une direction, un sens et une norme.

- **Coordonnées d'un vecteur:** Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $begin pmatrix x\ y end pmatrix$ si $\vec{u}=x vec i+y vec j$.
- **Milieu d'un segment:** Les coordonnées du milieu I d'un segment [AB] sont $begin pmatrix \frac{(x_A+x_B)}{(2)}\ \frac{(y_A+y_B)}{(2)} end pmatrix$.
- **Colinéarité:** Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles.
- **Vecteur directeur:** Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite si tous les vecteurs reliant deux points de la droite sont colinéaires à $\vec{u}$.
- **Equation cartésienne d'une droite:** $b(x-x_A)-a(y-y_A)=0$ avec $\vec{u} begin pmatrix a\ b end pmatrix$ vecteur directeur et A(x_A, y_A) un point de la droite.