

La fonction exponentielle

Prérequis

Avant d'aborder la fonction exponentielle, il est indispensable de maîtriser les notions suivantes vues dans les classes antérieures :

- Les propriétés des puissances (entières et rationnelles).
- La fonction logarithme népérien (\ln).
- La dérivation des fonctions usuelles.
- La résolution d'équations et d'inéquations.

Ce cours sur la fonction exponentielle se situe généralement vers le début de l'année de Terminale Générale en mathématiques. Il fait suite à l'étude de la fonction logarithme népérien et précède souvent l'étude des nombres complexes et des équations différentielles. Il permet de consolider les compétences en analyse et de préparer à des applications plus complexes.

Définition et propriétés fondamentales

Définition de la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée \exp , est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que :

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$.

Une notation courante pour $\exp(x)$ est e^x , où e est le nombre d'Euler (ou constante de Néper), approximativement égal à 2.71828. On a donc $\exp(1) = e \approx 2.718$.

- **Question de réflexion : Pourquoi est-il important que la fonction exponentielle soit l'unique fonction avec ces propriétés ?** ===== **Propriétés algébriques** ===== **La fonction exponentielle possède des propriétés algébriques essentielles :**
 - * Pour tous réels a et b , $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$, soit $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
 - * Pour tout réel a , $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$, soit $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
 - * Pour tous réels a et b , $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$, soit $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
 - * Pour tout réel a et tout entier relatif n , $\exp(na) = (\exp(a))^n$, soit $e^{na} = (e^a)^n$.
- * **Exemple : Simplifiez l'expression** $e^{2x} \cdot e^{-x+1} \cdot e^{2x} \cdot e^{-x+1} = e^{2x+(-x+1)} \cdot e^{2x+(-x+1)} = e^{x+1} \cdot e^{x+1} = e^{2x+2}$. ===== **Lien avec le logarithme népérien** ===== **La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien (\ln).** Cela signifie que :
 - * Pour tout réel x , $\ln(\exp(x)) = x$, soit $\ln(e^x) = x$.
 - * Pour tout réel $x > 0$, $\exp(\ln(x)) = x$, soit $e^{\ln(x)} = x$.
- * **Cette propriété est fondamentale pour résoudre des équations impliquant des exponentielles et des logarithmes.** * **Exemple**

: Résolvez l'équation $e^x=5$. En appliquant la fonction logarithme népérien aux deux membres, on obtient : $\ln(e^x)=\ln(5)$, soit $x=\ln(5)$. ===== **Étude de la fonction exponentielle** ===== **Variations et limites** ===== **La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. * _ . * _ . *

Question de réflexion : Comment ces limites se traduisent-elles graphiquement ? ===== **Dérivée et convexité** ===== **La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même :** $(\exp(x))' = \exp(x)$. **La dérivée seconde est aussi $\exp(x)$, qui est positive sur \mathbb{R} . Cela signifie que la fonction exponentielle est convexe sur \mathbb{R} .** ===== **Représentation graphique** ===== **La courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses (car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Elle passe par le point de coordonnées (0, 1) et sa pente en ce point est égale à 1. La courbe s'approche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $-\infty$ (asymptote horizontale).** =====

Applications de la fonction exponentielle ===== **Modèles d'évolution** ===== **La fonction exponentielle est utilisée pour modéliser de nombreux phénomènes d'évolution, tels que :** * **La croissance d'une population (bactéries, animaux).** * **La désintégration radioactive.** * **L'évolution d'un capital à intérêts composés.** * **La charge et la décharge d'un condensateur dans un circuit RC.** * **Exemple : Une population de bactéries double toutes les heures. Si la population initiale est de 1000 bactéries, quelle sera la population après 5 heures ? Soit $P(t)$ la population au temps t (en heures). On a $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, où P_0 est la population initiale et k est le taux de croissance. Comme la population double toutes les heures, $P(1) = 2P_0$. Donc, $2P_0 = P_0 \cdot e^k$, ce qui implique $e^k = 2$ et $k = \ln(2)$. Après 5 heures, la population sera $P(5) = 1000 \cdot e^{5 \cdot \ln(2)} = 1000 \cdot e^{\ln(2^5)} = 1000 \cdot 2^5 = 1000 \cdot 32 = 32000$ bactéries.** ===== **Équations différentielles** ===== **La fonction exponentielle est une solution fondamentale de l'équation différentielle $y' = ky$, où k est une constante réelle. Les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = Ce^{kx}$, où C est une constante arbitraire.** * **Exemple : Trouvez la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $y(0) = 3$. La solution générale est de la forme $y(x) = Ce^{2x}$. Pour déterminer la constante C , on utilise la condition initiale $y(0) = 3$. Donc, $3 = Ce^{2 \cdot 0} = C \cdot e^0 = C$. Ainsi, $C = 3$ et la solution est $y(x) = 3e^{2x}$.** ===== **Probabilités et statistiques** ===== **La fonction exponentielle intervient dans de nombreuses lois de probabilité, notamment la loi exponentielle, qui modélise la durée de vie sans vieillissement (par exemple, la durée de fonctionnement d'un appareil).** ===== **Croissances comparées et compléments** ===== **Croissances comparées** ===== **Il est important de connaître les croissances comparées des fonctions exponentielle, puissance et logarithme :** *

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ _ pour tout entier n . **La fonction exponentielle croît plus vite que toute fonction puissance.** * _ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour tout entier $n > 0$. **La fonction logarithme croît moins vite que toute fonction puissance.** * _ . *

Exemple : Calculez la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$. D'après les croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

==== **Forme exponentielle complexe** ==== Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels et i est l'unité imaginaire ($i^2 = -1$), on

définit l'exponentielle complexe par : $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$. Cette définition, connue sous le nom de formule d'Euler, relie l'exponentielle complexe aux fonctions trigonométriques. * Exemple : Exprimez $e^{i\pi}$ sous forme algébrique.

$$e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) = -1$$

==== **Résumé** ==== * **Fonction exponentielle :** Unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

Notée aussi e^x . * **Propriétés algébriques :** * $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ * $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ * $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ * $e^{na} = (e^a)^n$ *

Lien avec le logarithme népérien : * $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ * $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$

* **Variations et limites :** * Strictement croissante sur \mathbb{R} * $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ *

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

* **Dérivée :** $(\exp(x))' = \exp(x)$ * **Croissances comparées :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

* **Formule d'Euler :** $e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$

==== **Évaluation QCM** ==== * **Question:** La fonction exponentielle est : * (Correct) Strictement croissante sur \mathbb{R} * Strictement décroissante sur \mathbb{R} * Nulle en $x=0$

Explication: La fonction exponentielle est toujours strictement croissante et vaut 1 en $x=0$. * **Question:** Quelle est la dérivée de $f(x) = e^{3x}$? * (Correct) $3e^{3x}$ * e^{3x} * e^3

Explication: La dérivée de $e^{u(x)}$ est $u'(x)e^{u(x)}$. Ici, $u(x) = 3x$, donc $u'(x) = 3$. * **Question:**

Quelle est la valeur de $e^{\ln(7)}$? * (Correct) 7 * $e \cdot \ln(e)$ **Explication:** Par définition,

$e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$. * **Question:** Simplifiez l'expression $e^x \cdot e^{-2x}$. * (Correct) e^{-x} *

$e^{-2x^2} \cdot e^{-x^2}$ **Explication:** $e^x \cdot e^{-2x} = e^{x-2x} = e^{-x}$. * **Question:** Quelle est la limite de e^x quand

x tend vers $-\infty$? * (Correct) 0 * $+\infty$ * 1 **Explication:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. * **Question:** La

fonction exponentielle est-elle paire, impaire ou ni l'un ni l'autre ? * (Correct) Ni l'un

ni l'autre * Paire * Impaire **Explication:** e^{-x} n'est pas égal à e^x et e^{-x} n'est pas égal à $-e^x$. * **Question:**

Quelle est la solution de l'équation $e^x = 1$? * (Correct) $x=0$ * $x=1$ * $x=e$ **Explication:**

$e^0 = 1$. * **Question:** La fonction exponentielle est-elle convexe ? * (Correct) Oui * Non *

Seulement sur \mathbb{R}^+ **Explication:** La dérivée seconde de la fonction exponentielle est

positive sur \mathbb{R} . * **Question:** Si $e^x = 2$ et $e^y = 3$, que vaut e^{x+y} ? * (Correct) $6 \cdot 5 \cdot e^5$

Explication: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y = 2 \cdot 3 = 6$. * **Question:** Quelle est la limite de $\frac{e^x}{x}$ lorsque x tend

vers $+\infty$? * (Correct) $+\infty$ * 0 * 1 **Explication:** ** D'après les croissances comparées, la fonction exponentielle croît plus vite que la fonction identité.

From:
<https://wikiprof.fr/> - **wikiprof.fr**

Permanent link:
https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:la_fonction_exponentielle&rev=1752173499

Last update: **2025/07/10 20:51**

