Définition et propriétés fondamentales

La fonction exponentielle

Prérequis

Avant d'aborder la fonction exponentielle, il est indispensable de maîtriser les notions suivantes vues dans les classes antérieures :

- Les propriétés des puissances (entières et rationnelles).
- La fonction logarithme népérien (ln).
- La dérivation des fonctions usuelles.
- La résolution d'équations et d'inéquations.

Ce cours sur la fonction exponentielle se situe généralement vers le début de l'année de Terminale Générale en mathématiques. Il fait suite à l'étude de la fonction logarithme népérien et précède souvent l'étude des nombres complexes et des équations différentielles. Il permet de consolider les compétences en analyse et de préparer à des applications plus complexes.

Définition et propriétés fondamentales

Définition de la fonction exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\exp'(x)=\exp(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- $\exp(0)=1$.

Une notation courante pour $\exp(x)$ est e^x, où e est le nombre d'Euler (ou constante de Néper), approximativement égal à 2.71828. On a donc $\exp(1)=e\approx 2.718$.

- **Question de réflexion :** Pourquoi est-il important que la fonction exponentielle soit l'unique fonction avec ces propriétés ?

Propriétés algébriques

La fonction exponentielle possède des propriétés algébriques essentielles :

- Pour tous réels a et b, $\exp(a+b)=\exp(a).\exp(b)$, soit $e^{a+b}=e^a.e^b$.
- Pour tout réel a, $\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$, soit $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$.

- Pour tous réels a et b, $\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$, soit $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout réel a et tout entier relatif n, $\exp(na)=(\exp(a))^n$, soit $e^{na}=\left(e^a\right)^n$.
- **Exemple :** Simplifiez l'expression $e^{2x}.e^{-x+1}$.

$e^{2x}.e^{-x+1}=e^{2x+(-x+1)}=e^{x+1}$.

Lien avec le logarithme népérien

La fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien (ln). Cela signifie que :

- Pour tout réel x, $\ln(\exp(x))=x$, soit $\ln\left(e^x\right)=x$.
- Pour tout réel $x>0$, $\exp(\ln(x))=x$, soit $e^{\ln(x)}=x$.

Cette propriété est fondamentale pour résoudre des équations impliquant des exponentielles et des logarithmes.

- **Exemple :** Résolvez l'équation $e^x=5$.

En appliquant la fonction logarithme népérien aux deux membres, on obtient : $\ln\left(e^x\right)=\ln(5)$, soit $x=\ln(5)$.

Étude de la fonction exponentielle

Variations et limites

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

- $\lim x to-\infty e^x=0$.
- $\lim x to+\infty e^x=+\infty$.

- **Question de réflexion :** Comment ces limites se traduisent-elles graphiquement ?

Dérivée et convexité

La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même : $(\exp(x))'=\exp(x)$. La dérivée seconde est aussi $\exp(x)$, qui est positive sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses (car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Elle passe par le point de coordonnées (0, 1) et sa pente en ce point est égale à 1. La courbe s'approche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $-\infty$ (asymptote horizontale).

Applications de la fonction exponentielle

Modèles d'évolution

La fonction exponentielle est utilisée pour modéliser de nombreux phénomènes d'évolution, tels que :

- La croissance d'une population (bactéries, animaux).
- La désintégration radioactive.
- L'évolution d'un capital à intérêts composés.
- La charge et la décharge d'un condensateur dans un circuit RC.

- **Exemple :** Une population de bactéries double toutes les heures. Si la population initiale est de 1000 bactéries, quelle sera la population après 5 heures ?

Soit $P(t)$ la population au temps t (en heures). On a $P(t)=P_0.e^{kt}$, où P_0 est la population initiale et k est le taux de croissance. Comme la population double toutes les heures, $P(1)=2P_0$. Donc, $2P_0=P_0.e^k$, ce qui implique $e^k=2$ et $k=\ln(2)$.

Après 5 heures, la population sera $P(5)=1000.e^{5.\ln(2)}=1000.e^{\ln\left(2^5\right)}=1000.2^5=1000.32=32000$ bactéries.

Équations différentielles

La fonction exponentielle est une solution fondamentale de l'équation différentielle $y'=ky$, où k est une constante réelle. Les solutions de cette équation sont de la forme $y(x)=Ce^{kx}$, où C est une constante arbitraire.

- **Exemple :** Trouvez la solution de l'équation différentielle $y'=2y$ telle que $y(0)=3$.

La solution générale est de la forme $y(x)=Ce^{2x}$. Pour déterminer la constante C, on utilise la condition initiale $y(0)=3$. Donc, $3=Ce^{2.0}=C.e^0=C$. Ainsi, $C=3$ et la solution est $y(x)=3e^{2x}$.

Probabilités et statistiques

La fonction exponentielle intervient dans de nombreuses lois de probabilité, notamment la loi exponentielle, qui modélise la durée de vie sans vieillissement (par exemple, la durée de fonctionnement d'un appareil).

Croissances comparées et compléments

Croissances comparées

Il est important de connaître les croissances comparées des fonctions exponentielle, puissance et logarithme :

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n. La fonction exponentielle croît plus vite que toute fonction puissance.
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour tout entier $n > 0$. La fonction logarithme croît moins vite que toute fonction puissance.
- $\lim_{x \to 0} x.\ln(x) = 0$.

- **Exemple :** Calculez la limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

D'après les croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Forme exponentielle complexe

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels et i est l'unité imaginaire ($i^2 = -1$), on définit l'exponentielle complexe par :

$e^z = e^{x+iy} = e^x.\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)$.

Cette définition, connue sous le nom de **formule d'Euler**, relie l'exponentielle complexe aux fonctions trigonométriques.

- **Exemple :** Exprimez $e^{i\pi}$ sous forme algébrique.

$e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0.\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = 1.(-1 + i.0) = -1$.

Résumé

- **Fonction exponentielle :** Unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$. Notée aussi e^x.

- **Propriétés algébriques :**
  - $e^{a+b}=e^{a}.e^{b}$
  - $e^{-a}=\frac{1}{e^{a}}$
  - $e^{a-b}=\frac{e^{a}}{e^{b}}$
  - $e^{na}=\left(e^{a}\right)^{n}$
- **Lien avec le logarithme népérien :**
  - $\ln\left(e^{x}\right)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
  - $e^{\ln(x)}=x$ pour tout $x>0$
- **Variations et limites :**
  - Strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  - $\lim_{x \to -\infty} e^{x}=0$
  - $\lim_{x \to +\infty} e^{x}=+\infty$
- **Dérivée :** $(\exp(x))'=\exp(x)$
- **Croissances comparées :** $\lim_{x \to +\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ et $\lim_{x \to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^{n}}=0$
- **Formule d'Euler :** $e^{x+iy}=e^{x}.(\cos(y)+i\sin(y))$