La fonction exponentielle

Prérequis

Pour aborder l'étude de la fonction exponentielle, il est essentiel de maîtriser les concepts suivants acquis en classes précédentes :

- **Seconde :** Notions de base sur les fonctions, représentation graphique d'une fonction, vocabulaire associé (domaine de définition, image, antécédents).
- **Première :** Manipulation des puissances (propriétés des exposants), fonctions polynomiales, fonctions rationnelles, logarithmes (définition et propriétés de base).
- **Notion de limite** : Comprendre la notion de limite d'une fonction en un point et à l'infini.
- **Nombre *e*** : Connaître l'existence du nombre *e* et sa valeur approximative (2,718).

Ce cours s'inscrit dans le chapitre dédié aux fonctions de référence en Terminale, après l'étude des fonctions polynomiales, rationnelles et trigonométriques. Il prépare les élèves aux notions plus avancées rencontrées en mathématiques supérieures, notamment en analyse et en probabilités.

Chapitre 1 : Définition et propriétés de la fonction exponentielle

1.1 Définition de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle, notée $f(x)=e^x$, où *e* est un nombre irrationnel d'environ 2,71828, est une fonction fondamentale en mathématiques. Elle est définie pour tout nombre réel *x*.

Définition : La fonction exponentielle de base *e*, notée e^x, est la fonction définie sur ℝ par $e^x = sum_{k=0} \hat{} \infty \frac{(x^k)}{(k!)}$.

Cette définition, bien que formelle, peut paraître abstraite. Il est important de retenir que e^x représente une croissance (si *x* > 0) ou une décroissance (si *x* < 0) rapide.

1.2 Propriétés de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle possède des propriétés remarquables qui la rendent particulièrement utile :

- $e^0=1$
- $e^{a+b}=e^a.e^b$
- $e^{a-b}=\frac{(e^a)}{(e^b)}$

- $\left(e^{a}\right)^{b}=e^{ab}$
- $e^{-x}=\frac{(1)}{\left(e^{x}\right)}$

Ces propriétés découlent directement de la définition de l'exponentielle et sont essentielles pour simplifier les expressions et résoudre les équations.

1.3 Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction $y=e^{x}$ passe par le point (0, 1) et est toujours au-dessus de l'axe des abscisses. Elle est croissante sur tout son domaine de définition.

Chapitre 2 : Dérivée et intégrale de la fonction exponentielle

2.1 Dérivée de la fonction exponentielle

La dérivée de la fonction exponentielle est particulièrement simple :

Théorème : La dérivée de la fonction $f(x)=e^{x}$ est $fprime\,(x)=e^{x}$.

Cette propriété est unique : la fonction exponentielle est la seule fonction qui est égale à sa propre dérivée.

2.2 Intégrale de la fonction exponentielle

L'intégrale de la fonction exponentielle est également simple :

Théorème : Une primitive de la fonction $f(x)=e^{x}$ est $F(x)=e^{x}+C$, où C est une constante réelle.

2.3 Applications

Ces propriétés de dérivation et d'intégration sont utilisées dans de nombreux domaines, tels que la modélisation de la croissance démographique, la désintégration radioactive, ou encore la résolution d'équations différentielles.

Chapitre 3 : Équations et inéquations exponentielles

3.1 Résolution d'équations exponentielles

Pour résoudre une équation exponentielle de la forme $e^{ax+b}=c$, on utilise la fonction logarithique népérienne (ln), qui est la fonction inverse de la fonction exponentielle.

Méthode :

1. Appliquer le logarithme népérien aux deux membres de l'équation : $\ln\left(e^{ax+b}\right)=\ln(c)$.
2. Simplifier : $ax+b=\ln(c)$.
3. Résoudre l'équation linéaire en *x* : $x=\frac{(\ln(c)-b)}{(a)}$.

3.2 Résolution d'inéquations exponentielles

Pour résoudre une inéquation exponentielle de la forme $e^{ax+b}>c$, on procède de manière similaire :

1. Appliquer le logarithme népérien aux deux membres de l'inéquation : $\ln\left(e^{ax+b}\right)>\ln(c)$.
2. Simplifier : $ax+b>\ln(c)$.
3. Résoudre l'inéquation linéaire en *x* : $x>\frac{(\ln(c)-b)}{(a)}$ (si *a* > 0) ou $x<\frac{(\ln(c)-b)}{(a)}$ (si *a* < 0).

3.3 Exemples

Exemple 1 : Résoudre l'équation $e^{2x-1}=5$.

$\ln\left(e^{2x-1}\right)=\ln(5)$

```
<m>2x - 1 = ln(5)</m>
<m>2x = ln(5) + 1</m>
<m>x = (ln(5) + 1)/(2) approx 1,307</m>
```

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $e^{-x+2}<3$.

$\ln\left(e^{-x+2}\right)<\ln(3)$

```
<m>-x + 2 < ln(3)</m>
<m>-x < ln(3) - 2</m>
<m>x > 2 - ln(3) approx 0,901</m>
```

Chapitre 4 : Applications de la fonction exponentielle

4.1 Modélisation de la croissance et de la décroissance

La fonction exponentielle est utilisée pour modéliser de nombreux phénomènes de croissance ou de décroissance, tels que :

- **Croissance démographique :** $N(t)=N_0 e^{kt}$, où N_0 est la population initiale, *k* est le taux de croissance, et *t* est le temps.
- **Désintégration radioactive :** $N(t)=N_0 e^{-\lambda t}$, où N_0 est la quantité initiale de matière radioactive, λ est la constante de désintégration, et *t* est le temps.
- **Intérêt composé :** $C(t)=C_0 e^{rt}$, où C_0 est le capital initial, *r* est le taux d'intérêt, et *t* est le temps.

4.2 Applications en physique et en chimie

La fonction exponentielle apparaît également dans de nombreuses lois physiques et chimiques, telles que :

- **Loi de refroidissement de Newton :** La température d'un objet refroidit exponentiellement avec le temps.
- **Loi d'action de masse :** La vitesse d'une réaction chimique dépend exponentiellement des concentrations des réactifs.

4.3 Applications en informatique

La fonction exponentielle est utilisée en informatique pour analyser la complexité des algorithmes et pour modéliser la croissance de la puissance de calcul.

Résumé

- **Fonction exponentielle :** $f(x)=e^x$, où *e* ≈ 2,71828.
- **Propriétés :** $e^0=1$, $e^{a+b}=e^a.e^b$, $e^{a-b}=\frac{(e^a)}{(e^b)}$, $(e^a)^b=e^{ab}$, $e^{-x}=\frac{(1)}{(e^x)}$.
- **Dérivée :** $(e^x)'=e^x$.
- **Intégrale :** $int e^x dx=e^x+C$.
- **Équations exponentielles :** $e^{ax+b}=c Rightarrow x=\frac{(\ln(c)-b)}{(a)}$.
- **Inéquations exponentielles :** $e^{ax+b}>c Rightarrow x>\frac{(\ln(c)-b)}{(a)}$ (si *a* > 0) ou $x<\frac{(\ln(c)-b)}{(a)}$ (si *a* < 0).
- **Applications :** Croissance démographique, désintégration radioactive, intérêt composé, lois physiques et chimiques, complexité algorithmique.

From:
https://wikiprof.fr/ - **wikiprof.fr**

Permanent link:
https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:la_fonction_exponentielle&rev=1758390392

Last update: **2025/09/20 19:46**