La fonction ln

Prérequis

Pour aborder l'étude de la fonction logarithme népérien, notée ln, il est essentiel de maîtriser les concepts suivants acquis au cours des années précédentes :

- **Nombres réels :** Compréhension des différents types de nombres (entiers, rationnels, irrationnels) et leurs propriétés.
- **Puissances :** Maîtrise des règles de calcul sur les puissances (produit, quotient, puissance d'une puissance).
- **Exponentielle :** Connaissance de la fonction exponentielle e^x et de ses propriétés de base.
- **Notion de fonction :** Définition d'une fonction, image, antécédent, représentation graphique.
- **Limites :** Notions élémentaires sur les limites de fonctions.
- **Dérivées :** Notions élémentaires sur les dérivées de fonctions.

Ce cours s'inscrit dans le chapitre consacré aux fonctions de référence en Terminale Générale, après l'étude des fonctions polynomiales, rationnelles et exponentielles. Il prépare les élèves aux notions plus avancées de l'intégration et des équations différentielles.

Chapitre 1 : Introduction à la fonction ln

1.1 Définition et origine du logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction inverse de la fonction exponentielle de base *e* (nombre d'Euler, environ 2,71828). Cela signifie que pour tout nombre réel *x* positif, ln(*x*) est l'unique nombre réel *y* tel que $e^y = x$.

Définition : Pour tout nombre réel *x* strictement positif, ln(*x*) est le nombre réel *y* tel que $e^y = x$.

On peut écrire : $y = \ln(x) \leftrightarrow e^y = x$

Le logarithme népérien répond à la question : “À quelle puissance faut-il élever *e* pour obtenir *x* ?”

1.2 Propriétés de base

La fonction ln hérite de nombreuses propriétés de la fonction exponentielle, en raison de leur relation d'inverse.

- **ln(1) = 0** car $e^0 = 1$.
- **ln(e) = 1** car $e^1 = e$.
- **ln(e^x) = x** pour tout nombre réel *x*.

- **e^(ln(x)) = x** pour tout nombre réel *x* strictement positif.

1.3 Domaine de définition et représentation graphique

Le domaine de définition de la fonction ln est l'ensemble des nombres réels strictement positifs, noté $D_{\ln} = \left] 0;+\infty \right[$. La fonction ln n'est pas définie pour les nombres négatifs ou nuls.

La représentation graphique de la fonction ln est une courbe qui passe par le point (1, 0) et qui est croissante sur tout son domaine de définition. Elle est symétrique par rapport à l'origine.

Chapitre 2 : Opérations sur les logarithmes

2.1 Logarithme d'un produit

Une propriété fondamentale des logarithmes est la transformation d'un produit en somme de logarithmes.

Propriété : Pour tous nombres réels *a* et *b* strictement positifs, ln(*a* × *b*) = ln(*a*) + ln(*b*).

Exemple : ln(2 × 3) = ln(2) + ln(3)

2.2 Logarithme d'un quotient

De même, le logarithme d'un quotient se transforme en différence de logarithmes.

Propriété : Pour tous nombres réels *a* et *b* strictement positifs, ln(*a* / *b*) = ln(*a*) - ln(*b*).

Exemple : ln(6 / 2) = ln(6) - ln(2)

2.3 Logarithme d'une puissance

Le logarithme d'une puissance se transforme en produit de l'exposant et du logarithme de la base.

Propriété : Pour tout nombre réel *a* strictement positif et tout nombre réel *n*, ln(a^n) = *n* × ln(*a*).

Exemple : ln(2^3) = 3 × ln(2)

Chapitre 3 : Dérivée et intégrale de la fonction ln

3.1 Dérivée de la fonction ln

La dérivée de la fonction ln est une fonction simple.

Propriété : Pour tout nombre réel *x* strictement positif, la dérivée de ln(*x*) est $\frac{(1)}{(x)}$.

On écrit : $(\ln(x))'=\frac{(1)}{(x)}$

Cette propriété est essentielle pour résoudre des équations et étudier le comportement de la fonction ln.

3.2 Intégrale de la fonction ln

L'intégrale de la fonction ln peut être calculée par intégration par parties.

Propriété : Pour tout nombre réel *x* strictement positif, $\int_{\ln}^{(x)} dx=x\ln(x)-x+C$, où C est une constante d'intégration.

3.3 Applications

La dérivée et l'intégrale de la fonction ln sont utilisées dans de nombreux domaines, tels que la physique, la chimie, l'économie et les statistiques.

Chapitre 4 : Équations et inéquations impliquant ln

4.1 Résolution d'équations de la forme ln(x) = a

Pour résoudre une équation de la forme ln(*x*) = *a*, on utilise la propriété inverse de la fonction ln et de la fonction exponentielle.

Méthode : ln(*x*) = *a* ⇔ $x=e^{a}$

Exemple : ln(*x*) = 2 ⇔ $x=e^{2}$

4.2 Résolution d'inéquations de la forme ln(x) > a

Pour résoudre une inéquation de la forme ln(*x*) > *a*, on utilise également la propriété inverse de la fonction ln et de la fonction exponentielle. Il faut tenir compte du domaine de définition de la fonction ln.

Méthode : ln(*x*) > *a* ⇔ $x > e^a$ (si *x* > 0)

Exemple : ln(*x*) > 1 ⇔ $x > e$

4.3 Exercices corrigés

Exercice 1 : Résoudre l'équation ln(2*x* - 1) = 3.

Corrigé :

1. Condition d'existence : 2*x* - 1 > 0 ⇔ $x > \frac{(1)}{(2)}$
2. Application de la propriété inverse : 2*x* - 1 = e^3
3. Résolution de l'équation : 2*x* = e^3 + 1 ⇔ $x = \frac{\left(e^3+1\right)}{(2)}$
4. Vérification de la condition d'existence : $\frac{\left(e^3+1\right)}{(2)} > \frac{(1)}{(2)}$ (vrai)
5. Solution : $x = \frac{\left(e^3+1\right)}{(2)}$

Exercice 2 : Résoudre l'inéquation ln(*x* + 2) < 0.

Corrigé :

1. Condition d'existence : *x* + 2 > 0 ⇔ *x* > -2
2. Application de la propriété inverse : *x* + 2 < e^0 ⇔ *x* + 2 < 1
3. Résolution de l'inéquation : *x* < -1
4. Vérification de la condition d'existence : -1 > -2 (vrai)
5. Solution : *x* < -1

Résumé

- **Fonction logarithme népérien (ln) :** Fonction inverse de la fonction exponentielle de base *e*.
- **Définition :** $y = \ln(x) Leftrightarrow e^y = x$
- **Propriétés :**
- ln(1) = 0
- ln(e) = 1
- ln(a × b) = ln(a) + ln(b)
- ln(a / b) = ln(a) - ln(b)
- ln(a^n) = *n* × ln(a)
- **Dérivée :** $(\ln(x))' = \frac{(1)}{(x)}$

- **Intégrale :** $\int_{\ln}^{(x)} dx = x\ln(x) - x + C$
- **Résolution d'équations :** ln(*x*) = *a* ⇔ $x = e^{a}$
- **Résolution d'inéquations :** ln(*x*) > *a* ⇔ $x > e^{a}$