

Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels** : Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions** : Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique et leur vocabulaire (domaine de définition, image, antécédents).
- **Algèbre** : Maîtrise des manipulations algébriques de base (développement, factorisation, résolution d'équations et d'inéquations).
- **Notion d'indice** : Compréhension de l'utilisation des indices pour désigner les éléments d'une suite.
- **Ce cours se situe dans la partie "Nombre et Calcul" du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral.**

Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} (ou une partie de \mathbb{N}) et qui associe à chaque entier naturel n un nombre réel u_n . On note généralement une suite (u_n) .

- n est appelé l'**indice** de la suite.
- u_n est appelé le **terme général** de la suite.
- **Exemple** : La suite définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique. Les premiers termes de cette suite sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, etc.

Manières de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général** : Comme dans l'exemple précédent, on donne une formule explicite pour calculer u_n en fonction de n .
- **Par récurrence** : On donne le premier terme u_0 (ou u_1) et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n .

***Exemple :** La suite de Fibonacci est définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 2 : Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que $u_{n+1}=u_n+r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite arithmétique est donné par : $u_n = u_0 + nr$.
- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par :

$$S_n = \frac{(n+1)}{2} (u_0 + u_n).$$

Suites géométriques

Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que $u_{n+1}=qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite géométrique est donné par : $u_n = u_0 q^n$.
- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique est donnée par : $S_n = u_0 \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$ si $q \neq 1$.

Chapitre 3 : Limites d'une suite

Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite (u_n) converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l . On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Définition formelle de la limite

Une suite (u_n) converge vers une limite l si, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on ait $|u_n - l| < \epsilon$.

Chapitre 4 : Opérations sur les limites

Limites de sommes et de produits

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives l et l' , alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = l + l'$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = l \cdot l'$

Limites de quotients

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives l et l' , avec $l' \neq 0$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(u_n)}{(v_n)} = \frac{(l)}{(l')}$$

Chapitre 5 : Suites monotones et bornées

Suites monotones

Une suite est dite **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est dite **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites bornées

Une suite est dite **bornée** s'il existe un nombre réel M tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème de la convergence monotone

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Chapitre 6 : Limites et comparaison

Théorème de comparaison

Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$.

Chapitre 7 : Formes indéterminées

Les formes indéterminées

Certaines expressions impliquant des limites peuvent donner lieu à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

Méthodes pour lever les formes indéterminées

Pour lever les formes indéterminées, on peut utiliser différentes méthodes, telles que :

- La factorisation
- La multiplication par un conjugué
- Le théorème de comparaison
- La règle de l'Hôpital (qui sera étudiée plus tard)

Chapitre 8 : Applications des suites et limites

Intérêt des suites

Les suites sont utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés tels que :

- La croissance démographique

- L'évolution d'un capital investi
- La décroissance radioactive
- L'approximation de nombres irrationnels

Exemples d'applications

$$u_n = \frac{(n^2+1)}{(2n^2-3)}$$

Exemple 1 : Calculer la limite de la suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)}{(2n^2-3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Exemple 2 : Étudier la convergence de la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{((\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}))}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Résumé

- Une **suite numérique** est une fonction définie sur \mathbb{N} (ou une partie de \mathbb{N}).
- Une suite **arithmétique** est définie par une raison r : $u_{n+1} = u_n + r$. Son terme général est $u_n = u_0 + nr$.
- Une suite **géométrique** est définie par une raison q : $u_{n+1} = qu_n$. Son terme général est $u_n = u_0 q^n$.
- La **limite** d'une suite (u_n) est un nombre l tel que les termes de la suite se rapprochent de l lorsque n tend vers l'infini.
- Les **opérations sur les limites** permettent de calculer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites.
- Une suite **monotone** est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite **bornée** est une suite dont les termes sont compris entre deux bornes.
- Le **théorème de la convergence monotone** affirme que toute suite monotone et bornée est convergente.
- Le **théorème de comparaison** et le **théorème d'encadrement** permettent de déterminer la limite d'une suite en la comparant à d'autres suites.
- Les **formes indéterminées** sont des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement.
- Les suites et les limites sont utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés.

From:

<https://wikiprof.fr/> - **wikiprof.fr**

Permanent link:

https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:suites_et_limites

Last update: **2025/07/08 00:05**

