Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels :** Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions :** Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique, leur domaine de définition et leur image.
- **Algèbre :** Maîtrise des manipulations algébriques de base, notamment le développement, la factorisation et la résolution d'équations du premier et du second degré.
- **Notion de variable :** Compréhension du concept de variable et de son utilisation dans les expressions mathématiques.
- **Ce cours se situe dans la partie “Nombre et Calcul” du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral.**

Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels ($mathbbN$) ou une partie de celui-ci. On la note généralement $\left(u_n\right)$ où n est l'indice et u_n est le terme général de la suite. Chaque terme de la suite est obtenu en appliquant une règle de calcul à l'indice n.

Exemple : La suite définie par $u_n=2n+1$ pour tout $n \in mathbbN$ est une suite arithmétique dont les premiers termes sont : $u_0=1$, $u_1=3$, $u_2=5$, $u_3=7$, etc.

Manière de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général :** Comme dans l'exemple précédent, on donne une formule explicite pour calculer u_n en fonction de n.
- **Par récurrence :** On donne le premier terme u_0 (ou u_1) et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple : La suite de Fibonacci est définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout $n \in mathbbN$.

Suites arithmétiques et géométriques

Deux types de suites sont particulièrement importants :

- **Suite arithmétique :** Une suite $\left(u_n\right)$ est arithmétique s'il existe un nombre réel r (appelé raison) tel que $u_{n+1}=u_n+r$ pour tout $n \in mathbbN$. Le terme général d'une suite arithmétique est donné par $u_n=u_0+nr$.
- **Suite géométrique :** Une suite $\left(u_n\right)$ est géométrique s'il existe un nombre réel q (appelé raison) tel que $u_{n+1}=qu_n$ pour tout $n \in mathbbN$. Le terme général d'une suite géométrique est donné par $u_n=u_0q^n$.

Chapitre 2 : Limites d'une suite

Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite $\left(u_n\right)$ converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l. On note alors $\lim_{\_} n to \infty u_n=l$.

Exemple : La suite $u_n=\frac{(1)}{(n)}$ converge vers 0. En effet, lorsque n devient très grand, $\frac{(1)}{(n)}$ devient très petit et se rapproche de 0.

Définition formelle de la limite

Pour définir rigoureement la limite d'une suite, on utilise la définition suivante :

N
Une suite $\left(u_n\right)$ converge vers l si et seulement si pour tout $\epsilon>0$, il existe un entier tel que pour $n>N$ tout , on ait $|u_n-l|<\epsilon$.

Cette définition peut sembler abstraite, mais elle permet de donner un sens précis à la notion de convergence.

Limites infinies

Une suite $\left(u_n\right)$ diverge vers $+\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont supérieurs à tout nombre réel positif. On note alors $\lim_{\_} n to \infty u_n=+\infty$. De même, une suite $\left(u_n\right)$ diverge vers $-\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont inférieurs à tout nombre réel négatif. On note alors $\lim_{n to \infty} u_n = -\infty$.

Chapitre 3 : Opérations sur les limites

Limites de sommes et de produits

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites convergentes de limites respectives l et l, alors :

- $\lim_{n to \infty} \left(u_n + v_n\right) = l + l$
- $\lim_{n to \infty} \left(u_n . v_n\right) = l . l$

Limites de quotients

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites convergentes de limites respectives l et l, avec l, alors :

$\lim_{n to \infty} \frac{\left(u_n\right)}{\left(v_n\right)} = (l)/$

Formes indéterminées

Certaines opérations sur les limites conduisent à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

- $\infty - \infty$
- $0 . \infty$
- $\frac{(0)}{(0)}$
- $\frac{(\infty)}{(\infty)}$

Dans ces cas, il est nécessaire de transformer l'expression pour lever l'indétermination.

Chapitre 4 : Théorèmes de comparaison

Théorème de comparaison

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors :

- Si $\lim_{n \to \infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \to \infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \to \infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \to \infty} v_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \to \infty} v_n = \lim_{n \to \infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \to \infty} u_n = l$.

Chapitre 5 : Suites monotones et suites bornées

Suites monotones

Une suite (u_n) est dite **croissante** si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in mathbb N$. Elle est dite **décroissante** si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in mathbb N$.

Suites bornées

Une suite (u_n) est dite **bornée** s'il existe un nombre réel M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in mathbb N$.

Théorème de convergence des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Chapitre 6 : Applications et exercices

Exercice 1 : Étude d'une suite arithmétique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.

1. Déterminer la nature de la suite (u_n).
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé :

1. La suite $\left(u_n\right)$ est une suite arithmétique de raison $r=3$.
2. $u_n=u_0+nr=2+3n$.
3. $\lim_{n to \infty} u_n=\lim_{n to \infty}(2+3n)=+\infty$.

Exercice 2 : Étude d'une suite géométrique

Soit la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_0=1$ et $v_{n+1}=\frac{(1)}{(2)}v_n$.

1. Déterminer la nature de la suite $\left(v_n\right)$.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite $\left(v_n\right)$.

Corrigé :

1. La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{(1)}{(2)}$.
2. $v_n=v_0q^n=\left(\frac{(1)}{(2)}\right)^n$.
3. $\lim_{n to \infty} v_n=\lim_{n to \infty}\left(\frac{(1)}{(2)}\right)^n=0$.

Résumé

- Une **suite numérique** est une fonction définie sur $mathbbN$.
- Une suite **arithmétique** a une raison constante r : $u_{n+1}=u_n+r$. Son terme général est $u_n=u_0+nr$.
- Une suite **géométrique** a une raison constante q : $u_{n+1}=qu_n$. Son terme général est $u_n=u_0q^n$.
- $\lim_{n to \infty} u_n=l$ signifie que les termes de la suite se rapprochent de l lorsque n tend vers l'infini.
- $\lim_{n to \infty} u_n=+\infty$ ou $-\infty$ signifie que la suite diverge vers l'infini.
- **Opérations sur les limites :**
- $\lim_{n to \infty}\left(u_n+v_n\right)=\lim_{n to \infty} u_n+\lim_{n to \infty} v_n$
- $\lim_{n to \infty}\left(u_n.v_n\right)=\lim_{n to \infty} u_n.\lim_{n to \infty} v_n$
- $\lim_{n to \infty}\frac{\left(u_n\right)}{\left(v_n\right)}=\frac{\left(\lim_{n to \infty} u_n\right)}{\lim_{(n to \infty)} v_n}$ (si le dénominateur est non nul)
- **Théorème de comparaison :** Si $u_n \geqslant v_n$, alors $\lim_{n to \infty} v_n \leqslant \lim_{n to \infty} u_n$.

- **Théorème des gendarmes :** Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim_{\_} n\, to \infty v_n = \lim_{\_} n\, to \infty w_n = l$, alors $\lim_{\_} n\, to \infty u_n = l$.
- Une suite **monotone et bornée** est convergente.