

Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels** : Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions** : Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique, leur domaine de définition et leur image.
- **Algèbre** : Maîtrise des manipulations algébriques de base, notamment le développement, la factorisation et la résolution d'équations du premier et du second degré.
- **Notion de variable** : Compréhension du concept de variable et de son utilisation dans les expressions mathématiques.
- **Ce cours se situe dans la partie "Nombre et Calcul" du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral.**

Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels (\mathbb{N}) ou une partie de celui-ci. On la note généralement (u_n) où n est l'indice et u_n est le terme général de la suite. Chaque terme de la suite est obtenu en appliquant une règle de calcul à l'indice n .

Exemple : La suite définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique dont les premiers termes sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, etc.

Manière de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général** : Comme dans l'exemple précédent, on donne une formule explicite pour calculer u_n en fonction de n .
- **Par récurrence** : On donne le premier terme u_0 (ou u_1) et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n .

Exemple : La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites arithmétiques et géométriques

Deux types de suites sont particulièrement importants :

- **Suite arithmétique** : Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r (appelé raison) tel que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le terme général d'une suite arithmétique est donné par $u_n = u_0 + nr$.
- **Suite géométrique** : Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un nombre réel q (appelé raison) tel que $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le terme général d'une suite géométrique est donné par $u_n = u_0 q^n$.

Chapitre 2 : Limites d'une suite

Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite (u_n) converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l . On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Exemple : La suite $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0. En effet, lorsque n devient très grand, $\frac{1}{n}$ devient très petit et se rapproche de 0.

Définition formelle de la limite

Pour définir rigoureusement la limite d'une suite, on utilise la définition suivante :

Une suite (u_n) converge vers l si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on ait $|u_n - l| < \epsilon$.

Cette définition peut sembler abstraite, mais elle permet de donner un sens précis à la notion de convergence.

Limites infinies

Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont supérieurs à tout nombre réel positif. On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. De même, une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont inférieurs à tout nombre réel négatif. On note

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Chapitre 3 : Opérations sur les limites

Limites de sommes et de produits

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives l et l' , alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = l + l'$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = l \cdot l'$

Limites de quotients

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives l et l' , avec $l' \neq 0$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(u_n)}{(v_n)} = \frac{l}{l'}$$

Formes indéterminées

Certaines opérations sur les limites conduisent à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Dans ces cas, il est nécessaire de transformer l'expression pour lever l'indétermination.

Chapitre 4 : Théorèmes de comparaison

Théorème de comparaison

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang, alors :

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Chapitre 5 : Suites monotones et suites bornées

Suites monotones

Une suite (u_n) est dite **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est dite **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suites bornées

Une suite (u_n) est dite **bornée** s'il existe un nombre réel M tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème de convergence des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Chapitre 6 : Applications et exercices

Exercice 1 : Étude d'une suite arithmétique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.

1. Déterminer la nature de la suite (u_n) .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Corrigé :

1. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=3$.
2. $u_n = u_0 + nr = 2 + 3n$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 3n) = +\infty$

Exercice 2 : Étude d'une suite géométrique

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)v_n$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) .
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Corrigé :

1. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Résumé

- Une **suite numérique** est une fonction définie sur \mathbb{N} .
- Une suite **arithmétique** a une raison constante r : $u_{n+1} = u_n + r$. Son terme général est $u_n = u_0 + nr$.
- Une suite **géométrique** a une raison constante q : $u_{n+1} = qu_n$. Son terme général est $u_n = u_0 q^n$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ signifie que les termes de la suite se rapprochent de l lorsque n tend vers l'infini.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ signifie que la suite diverge vers l'infini.
- **Opérations sur les limites :**
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}$ (si le dénominateur est non nul)
- **Théorème de comparaison :** Si $u_n \geq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

- **Théorème des gendarmes** : Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.
- Une suite **monotone et bornée** est convergente.

From: <https://wikiprof.fr/> - **wikiprof.fr**

Permanent link: https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:suites_et_limites&rev=1751913322

Last update: **2025/07/07 20:35**

