Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels :** Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la notion d'ordre.
- **Fonctions :** Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique et leur vocabulaire (domaine de définition, image, antécédents).
- **Algèbre :** Maîtrise des manipulations algébriques de base (développement, factorisation, résolution d'équations du premier et du second degré).
- **Notion d'indice :** Compréhension de la notion d'indice dans une suite (u_n).
- **Ce cours se situe dans la partie “Nombre et Calcul” du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral.**

Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$) ou une partie de celui-ci, à valeurs dans l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$). On la note généralement (u_n) où n est l'indice. Chaque terme u_n est appelé terme général de la suite.

Exemple : La suite définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique. Les premiers termes sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, etc.

Manières de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général :** u_n est exprimé en fonction de n.
- **Par récurrence :** On donne le premier terme u_0 et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple : Suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$. Les premiers termes sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, etc. (suite arithmétique).

Représentation graphique d'une suite

On peut représenter graphiquement une suite en plaçant les points de coordonnées (n, u_n) dans un repère. Ces points sont généralement isolés, contrairement à la représentation graphique d'une fonction continue.

Chapitre 2 : Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Une **suite arithmétique** est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant une constante (appelée **raison** *r*) au terme précédent. On a donc $u_{n+1} = u_n + r$.

Formule du terme général : $u_n = u_0 + nr$

Formule de la somme des n premiers termes : $S_n = \frac{(n)}{(2)}\left(u_0+u_n\right)$

Exemple : La suite définie par $u_0 = 2$ et $r = 3$ est une suite arithmétique. $u_n = 2 + 3n$.

Suites géométriques

Une **suite géométrique** est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante (appelée **raison** *q*). On a donc $u_{n+1} = q * u_n$.

Formule du terme général : $u_n = u_0 * q^n$

Formule de la somme des n premiers termes : $S_n = u^0 * \frac{\left(1\text{-}q^{n+1}\right)}{(1\text{-}q)}$ si $q \neq 1$

Exemple : La suite définie par $u_0 = 1$ et $q = 2$ est une suite géométrique. $u_n = 2^n$.

Chapitre 3 : Limites d'une suite

Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite (u_n) converge vers une limite *l* si les termes de la suite se rapprochent de *l* lorsque n devient suffisamment grand.

Définition formelle de la limite

Une suite (u_n) converge vers une limite *l* si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $|u_n - l| < \varepsilon$.

Suites convergentes, divergentes et non bornées

- **Suite convergente :** Suite qui admet une limite finie.
- **Suite divergente :** Suite qui ne converge pas vers une limite finie.
- **Suite non bornée :** Suite dont les termes ne sont pas limités dans un intervalle fini.

Chapitre 4 : Opérations sur les limites

Limites de sommes, produits et quotients

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de limites respectives *l* et *l'*, alors :

- $\lim (u_n + v_n) = l + l'$
- $\lim (u_n * v_n) = l * l'$
- $\lim (u_n / v_n) = l / l'$ si $l' \neq 0$

Limites et inégalités

Si $u_n \leq v_n$ pour tout n à partir d'un certain rang, et si $\lim(u_n) = l$ et $\lim(v_n) = l'$, alors $l \leq l'$.

Chapitre 5 : Limites et comparaison

Théorème des gendarmes (ou théorème de comparaison)

Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n à partir d'un certain rang, et si $\lim(u_n) = \lim(w_n) = l$, alors $\lim(v_n) = l$.

Suites monotones et bornées

- **Suite croissante :** $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n.
- **Suite décroissante :** $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.
- **Suite monotone :** Suite croissante ou décroissante.

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Chapitre 6 : Limites et applications

Suites définies par récurrence

L'étude de la limite d'une suite définie par récurrence peut se faire en utilisant les méthodes précédentes, ou en cherchant un point fixe (une valeur *l* telle que $l = f(l)$, où f est la fonction qui définit la récurrence).

Applications aux problèmes concrets

Les suites et les limites peuvent être utilisées pour modéliser et résoudre des problèmes concrets, tels que la croissance d'une population, l'amortissement d'un prêt, ou la convergence d'un algorithme.

From:
https://wikiprof.fr/ - **wikiprof.fr**

Permanent link:
https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:suites_et_limites&rev=1751918698

Last update: **2025/07/07 22:04**