

# Suites et limites

## Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels** : Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions** : Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique, leur domaine de définition et leur image.
- **Algèbre** : Maîtrise des manipulations algébriques de base, notamment le développement, la factorisation et la résolution d'équations du premier et du second degré.
- **Notion d'indice** : Compréhension de l'utilisation d'indices pour désigner les éléments d'une suite (par exemple,  $u_n$  pour le n-ième terme d'une suite).
- **Ce cours se situe dans la partie "Fonctions" du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions numériques et avant l'introduction au calcul différentiel.**

## Chapitre 1 : Définition et types de suites

### 1.1 Définition d'une suite

Une **suite** est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  (ou une partie de  $\mathbb{N}$ ). On note généralement une suite  $(u_n)$  où  $n$  est l'indice et  $u_n$  est le terme général de la suite. Chaque terme de la suite est associé à un entier naturel  $n$ .

**Exemple** : La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est une suite dont les premiers termes sont :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 5$ ,  $u_3 = 7$ , etc.

### 1.2 Suites arithmétiques

Une **suite arithmétique** est une suite où la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette différence est appelée **raison** de la suite, notée  $r$ . On a donc  $u_{n+1} = u_n + r$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

\*Formule générale :  $u_n = u_0 + nr$ , où  $u_0$  est le premier terme de la suite.

**Exemple** : La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $r = 3$  est une suite arithmétique dont les premiers termes sont :  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 5$ ,  $u_2 = 8$ ,  $u_3 = 11$ , etc.

## 1.3 Suites géométriques

Une **suite géométrique** est une suite où le rapport entre deux termes consécutifs est constant. Ce rapport est appelé **raison** de la suite, notée  $q$ . On a donc  $u_{n+1} = qu_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

\*Formule générale :  $u_n = u_0 q^n$ , où  $u_0$  est le premier terme de la suite.

**Exemple :** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $q = 2$  est une suite géométrique dont les premiers termes sont :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 4$ ,  $u_3 = 8$ , etc.

## Chapitre 2 : Limites d'une suite

### 2.1 Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$  si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de  $l$ . On note alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ .

**Exemple :** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{1}{n}$  converge vers 0, car les termes de la suite deviennent de plus en plus petits lorsque  $n$  augmente.

### 2.2 Définition formelle de la limite

Pour définir rigoureusement la limite d'une suite, on utilise la définition suivante :

$N$   
Une suite  $(u_n)$  converge vers  $l$  si et seulement si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$ , on ait  $|u_n - l| < \epsilon$ .

### 2.3 Limites infinies

Une suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement grands. On note alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ . De même, une suite  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$  si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement petits (négatifs). On note alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ .

## Chapitre 3 : Opérations sur les limites

### 3.1 Limites de sommes et de produits

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes, alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

### 3.2 Limites de quotients

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes, avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(u_n)}{(v_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}$$

### 3.3 Formes indéterminées

Certaines opérations sur les limites conduisent à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les

plus courantes sont :  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ . Dans ces cas, il est nécessaire de manipuler l'expression pour lever l'indétermination.

## Chapitre 4 : Suites monotones et bornées

### 4.1 Suites monotones

Une suite est dite **croissante** si  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Elle est dite **décroissante** si  $u_{n+1} \leq u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 4.2 Suites bornées

Une suite est dite **bornée** s'il existe un réel  $M$  tel que  $|u_n| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 4.3 Théorème de la convergence monotone

Toute suite monotone et bornée est convergente.

# Chapitre 5 : Applications des suites et limites

## 5.1 Étude de fonctions à l'aide des suites

Les suites peuvent être utilisées pour étudier le comportement de fonctions en certains points. Par exemple, pour déterminer la limite d'une fonction  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on peut étudier la limite de la suite  $f(n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## 5.2 Modélisation de phénomènes par des suites

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés à l'aide de suites. Par exemple, l'évolution d'une population, la croissance d'un capital, ou la diminution d'un médicament dans le sang.

# Chapitre 6 : Suites définies par récurrence

## 6.1 Définition d'une suite par récurrence

Une suite  $(u_n)$  est définie par récurrence si on donne le premier terme  $u_0$  et une relation de récurrence qui permet de calculer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

**Exemple :** La suite de Fibonacci est définie par  $u_0=0$ ,  $u_1=1$  et  $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 6.2 Recherche de la limite d'une suite définie par récurrence

Pour trouver la limite d'une suite définie par récurrence, on peut souvent utiliser la méthode suivante :

1. Supposer que la suite converge vers une limite  $l$ .
2. Passer à la limite dans la relation de récurrence.
3. Résoudre l'équation obtenue pour trouver la valeur de  $l$ .
4. Vérifier que la suite converge bien vers cette limite.

## Résumé

- Une **suite** est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$ .

- Une **suite arithmétique** a une raison constante  $r$ :  $u_n = u_0 + nr$ .
- Une **suite géométrique** a une raison constante  $q$ :  $u_n = u_0 q^n$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  signifie que les termes de la suite se rapprochent de  $l$ .
- **Opérations sur les limites** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}$  (si  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$ ).
- Une suite **monotone** est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite **bornée** a un majorant et un minorant.
- **Théorème de la convergence monotone** : Toute suite monotone et bornée converge.
- Une suite définie par **réurrence** est définie par  $u_0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

From:  
<https://wikiprof.fr/> - wikiprof.fr

Permanent link:  
[https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale\\_generale:mathematiques:suites\\_et\\_limites&rev=1751918789](https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:suites_et_limites&rev=1751918789)

Last update: 2025/07/07 22:06

