

Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels** : Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions** : Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique, leur domaine de définition et leur image.
- **Algèbre** : Maîtrise des manipulations algébriques de base, notamment le développement, la factorisation et la résolution d'équations du premier et du second degré.
- **Notion d'indice** : Compréhension de l'utilisation d'indices pour désigner les éléments d'une suite (par exemple, u_n pour le n-ième terme d'une suite).
- **Ce cours se situe dans la partie “Fonctions” du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions numériques et avant l'introduction au calcul différentiel.**

Chapitre 1 : Définition et types de suites

1.1 Définition d'une suite

Une **suite** est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} (ou une partie de \mathbb{N}). On note généralement une suite (u_n) où n est l'indice et u_n est le terme général de la suite. Chaque terme de la suite est associé à un entier naturel n .

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite dont les premiers termes sont : $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7$, etc.

1.2 Suites arithmétiques

Une **suite arithmétique** est une suite où la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette différence est appelée **raison** de la suite, notée r . On a donc $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*Formule générale : * $u_n = u_0 + nr$, où u_0 est le premier terme de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $r = 3$ est une suite arithmétique dont les premiers termes sont : $u_0 = 2, u_1 = 5, u_2 = 8, u_3 = 11$, etc.

1.3 Suites géométriques

Une **suite géométrique** est une suite où le rapport entre deux termes consécutifs est constant. Ce rapport est appelé **raison** de la suite, notée q . On a donc $u_{n+1} = q u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*Formule générale : * $u_n = u_0 q^n$, où u_0 est le premier terme de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $q = 2$ est une suite géométrique dont les premiers termes sont : $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8$, etc.

Chapitre 2 : Limites d'une suite

2.1 Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite (u_n) converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l . On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0, car les termes de la suite deviennent de plus en plus petits lorsque n augmente.

2.2 Définition formelle de la limite

Pour définir rigoureusement la limite d'une suite, on utilise la définition suivante :

Une suite (u_n) converge vers l si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on ait $|u_n - l| < \epsilon$.

2.3 Limites infinies

Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement grands. On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$. De même, une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement petits (négatifs). On note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$ alors .

Chapitre 3 : Opérations sur les limites

3.1 Limites de sommes et de produits

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes, alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

3.2 Limites de quotients

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(u_n)}{(v_n)} = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right)}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right)}$$

3.3 Formes indéterminées

Certaines opérations sur les limites conduisent à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. Dans ces cas, il est nécessaire de manipuler l'expression pour lever l'indétermination.

Chapitre 4 : Suites monotones et bornées

4.1 Suites monotones

Une suite est dite **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est dite **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Suites bornées

Une suite est dite **bornée** s'il existe un réel M tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Théorème de la convergence monotone

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Chapitre 5 : Applications des suites et limites

5.1 Étude de fonctions à l'aide des suites

Les suites peuvent être utilisées pour étudier le comportement de fonctions en certains points. Par exemple, pour déterminer la limite d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on peut étudier la limite de la suite $f(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5.2 Modélisation de phénomènes par des suites

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés à l'aide de suites. Par exemple, l'évolution d'une population, la croissance d'un capital, ou la diminution d'un médicament dans le sang.

Chapitre 6 : Suites définies par récurrence

6.1 Définition d'une suite par récurrence

Une suite (u_n) est définie par récurrence si on donne le premier terme u_0 et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n .

Exemple : La suite de Fibonacci est définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.2 Recherche de la limite d'une suite définie par récurrence

Pour trouver la limite d'une suite définie par récurrence, on peut souvent utiliser la méthode suivante :

1. Supposer que la suite converge vers une limite l .
2. Passer à la limite dans la relation de récurrence.
3. Résoudre l'équation obtenue pour trouver la valeur de l .
4. Vérifier que la suite converge bien vers cette limite.

Résumé

- Une **suite** est une fonction définie sur \mathbb{N} .

- Une **suite arithmétique** a une raison constante r : $u_n = u_0 + nr$.
- Une **suite géométrique** a une raison constante q : $u_n = u_0 q^n$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$
- – signifie que les termes de la suite se rapprochent de l .
 $\lim_u = \lim_n + \lim_n$ $\lim_v = \lim_n \cdot \lim_n$,
- **Opérations sur les limites :** $(u_n + v_n) \xrightarrow{u} \lim_n + \lim_n$, $(u_n \cdot v_n) \xrightarrow{u} \lim_n \cdot \lim_n$,

$$\lim_{(u_n)} / (v_n) = \frac{\left(\lim_n \right)_u}{\left(\lim_n \right)_v} \quad (\text{si } \lim_n \neq 0).$$

- Une suite **monotone** est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite **bornée** a un majorant et un minorant.
- **Théorème de la convergence monotone** : Toute suite monotone et bornée converge.
- Une suite définie par **récurrence** est définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

From:
<https://wikiprof.fr/> - **wikiprof.fr**

Permanent link:
https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:suites_et_limites&rev=1751918789

Last update: 2025/07/07 22:06

