Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels :** Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions :** Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique, leur domaine de définition et leur image.
- **Algèbre :** Maîtrise des manipulations algébriques de base, notamment le développement, la factorisation et la résolution d'équations du premier et du second degré.
- **Notion d'indice :** Compréhension de l'utilisation d'indices pour désigner les éléments d'une suite (par exemple, u_n pour le n-ième terme d'une suite).
- **Ce cours se situe dans la partie “Fonctions” du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions numériques et avant l'introduction au calcul différentiel.**

Chapitre 1 : Définition et types de suites

1.1 Définition d'une suite

Une **suite** est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers naturels $mathbbN$ (ou une partie de $mathbbN$). On note généralement une suite $\left(u_n\right)$ où n est l'indice et u_n est le terme général de la suite. Chaque terme de la suite est associé à un entier naturel n.

Exemple : La suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n=2n+1$ pour tout $n \in mathbbN$ est une suite dont les premiers termes sont : $u_0=1$, $u_1=3$, $u_2=5$, $u_3=7$, etc.

1.2 Suites arithmétiques

Une **suite arithmétique** est une suite où la différence entre deux termes consécutifs est constante. Cette différence est appelée **raison** de la suite, notée r. On a donc $u_{n+1}=u_n+r$ pour tout $n \in mathbbN$.

Formule générale : $u_n=u_0+nr$, où u_0 est le premier terme de la suite.

Exemple : La suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0=2$ et $r=3$ est une suite arithmétique dont les premiers termes sont : $u_0=2$, $u_1=5$, $u_2=8$, $u_3=11$, etc.

1.3 Suites géométriques

Une **suite géométrique** est une suite où le rapport entre deux termes consécutifs est constant. Ce rapport est appelé **raison** de la suite, notée q. On a donc $u_{n+1}=qu_n$ pour tout $n \in mathbbN$.

Formule générale : $u_n=u_0q^n$, où u_0 est le premier terme de la suite.

Exemple : La suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0=1$ et $q=2$ est une suite géométrique dont les premiers termes sont : $u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=4$, $u_3=8$, etc.

Chapitre 2 : Limites d'une suite

2.1 Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite $\left(u_n\right)$ converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l. On note alors $\lim n \to \infty u_n=l$.

Exemple : La suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n=\frac{(1)}{(n)}$ converge vers 0, car les termes de la suite deviennent de plus en plus petits lorsque n augmente.

2.2 Définition formelle de la limite

Pour définir rigoureement la limite d'une suite, on utilise la définition suivante :

N Une suite $\left(u_n\right)$ converge vers l si et seulement si pour tout $\epsilon>0$, il existe un entier tel que pour $n>N$ tout , on ait $|u_n-l|<\epsilon$.

2.3 Limites infinies

Une suite $\left(u_n\right)$ diverge vers $+\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement grands. On note alors $\lim n \to \infty u_n=+\infty$. De même, une suite $\left(u_n\right)$ diverge vers $-\infty$ si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement petits (négatifs). On note alors $\lim n \to \infty u_n=-\infty$.

Chapitre 3 : Opérations sur les limites

3.1 Limites de sommes et de produits

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites convergentes, alors :

- $\lim_{} n \to \infty\left(u_n+v_n\right)=\lim_{} n \to \infty u_n+\lim_{} n \to \infty v_n$
- $\lim_{} n \to \infty\left(u_n . v_n\right)=\lim_{} n \to \infty u_n . \lim_{} n \to \infty v_n$

3.2 Limites de quotients

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites convergentes, avec $\lim_{} n \to \infty v_n \neq 0$, alors :

$$\lim_{} n \to \infty \frac{\left(u_n\right)}{\left(v_n\right)}=\frac{\left(\lim_{} n \to \infty u_n\right)}{\lim_{}(n \to \infty) v_n}$$

3.3 Formes indéterminées

Certaines opérations sur les limites conduisent à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont : $\frac{(0)}{(0)}$, $\frac{(\infty)}{(\infty)}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$. Dans ces cas, il est nécessaire de manipuler l'expression pour lever l'indétermination.

Chapitre 4 : Suites monotones et bornées

4.1 Suites monotones

Une suite est dite **croissante** si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in mathbb N$. Elle est dite **décroissante** si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in mathbb N$.

4.2 Suites bornées

Une suite est dite **bornée** s'il existe un réel M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in mathbb N$.

4.3 Théorème de la convergence monotone

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Chapitre 5 : Applications des suites et limites

5.1 Étude de fonctions à l'aide des suites

Les suites peuvent être utilisées pour étudier le comportement de fonctions en certains points. Par exemple, pour déterminer la limite d'une fonction $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, on peut étudier la limite de la suite $f(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5.2 Modélisation de phénomènes par des suites

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés à l'aide de suites. Par exemple, l'évolution d'une population, la croissance d'un capital, ou la diminution d'un médicament dans le sang.

Chapitre 6 : Suites définies par récurrence

6.1 Définition d'une suite par récurrence

Une suite $\left(u_n\right)$ est définie par récurrence si on donne le premier terme u_0 et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple : La suite de Fibonacci est définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout $n \in mathbbN$.

6.2 Recherche de la limite d'une suite définie par récurrence

Pour trouver la limite d'une suite définie par récurrence, on peut souvent utiliser la méthode suivante :

1. Supposer que la suite converge vers une limite l.
2. Passer à la limite dans la relation de récurrence.
3. Résoudre l'équation obtenue pour trouver la valeur de l.
4. Vérifier que la suite converge bien vers cette limite.

Résumé

- Une **suite** est une fonction définie sur $mathbbN$.

- Une **suite arithmétique** a une raison constante r : $u_n = u_0 + nr$.
- Une **suite géométrique** a une raison constante q : $u_n = u_0 q^n$.
- $\lim_{n \to \infty} u_n = l$ signifie que les termes de la suite se rapprochent de l.
- **Opérations sur les limites :** $\lim (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$, $\lim (u_n . v_n) = \lim u_n . \lim v_n$, $\lim (u_n / v_n) = \frac{(\lim u_n)}{(\lim v_n)}$ (si $\lim v_n \neq 0$).
- Une suite **monotone** est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite **bornée** a un majorant et un minorant.
- **Théorème de la convergence monotone :** Toute suite monotone et bornée converge.
- Une suite définie par **récurrence** est définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.