

# Suites et limites

## Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels** : Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions** : Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique, leur domaine de définition et leur image.
- **Algèbre** : Maîtrise des manipulations algébriques de base, notamment le développement, la factorisation et la résolution d'équations du premier et du second degré.
- **Notion d'indice** : Compréhension de l'utilisation des indices pour désigner les éléments d'une suite (par exemple,  $u_n$  pour le n-ième terme d'une suite).
- **Ce cours se situe dans la partie "Suites et fonctions" du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral.**

## Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

### Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels ( $\mathbb{N}$ ) ou une partie de cet ensemble, à valeurs dans l'ensemble des nombres réels ( $\mathbb{R}$ ). On note généralement une suite  $(u_n)$  où  $n$  est l'indice et  $u_n$  est le terme général de la suite.

**Exemple** : La suite définie par  $u_n = 2n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est une suite arithmétique. Les premiers termes de cette suite sont :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 5$ ,  $u_3 = 7$ , etc.

### Manières de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général** : Comme dans l'exemple précédent, on donne une formule explicite pour calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- **Par récurrence** : On donne le premier terme  $u_0$  (ou  $u_1$ ) et une relation de récurrence qui permet de calculer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

**Exemple** : La suite de Fibonacci est définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  et  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Représentation graphique d'une suite

On peut représenter graphiquement une suite en plaçant les points de coordonnées  $(n, u_n)$  dans un repère.

## Chapitre 2 : Suites arithmétiques et géométriques

### Suites arithmétiques

Une **suite arithmétique** est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant une constante, appelée **raison** (notée  $r$ ), au terme précédent. On a donc  $u_{n+1} = u_n + r$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

\*Formule du terme général :  $u_n = u_0 + nr$

**Exemple :** La suite définie par  $u_n = 3n + 2$  est une suite arithmétique de raison  $r = 3$  et de premier terme  $u_0 = 2$ .

### Suites géométriques

Une **suite géométrique** est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante, appelée **raison** (notée  $q$ ). On a donc  $u_{n+1} = q \cdot u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

\*Formule du terme général :  $u_n = u_0 \cdot q^n$

**Exemple :** La suite définie par  $u_n = 5 \cdot 2^n$  est une suite géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $u_0 = 5$ .

## Chapitre 3 : Limites d'une suite

### Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite  $(u_n)$  converge vers une limite  $l$  si les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de  $l$  lorsque  $n$  devient de plus en plus grand.

### Définition formelle de la limite

$N$

On dit que la suite converge vers  $l$  si, pour tout nombre réel  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n > N$ , on ait  $|u_n - l| < \epsilon$ .

## Suites convergentes, divergentes et non définies

- **Suite convergente** : Une suite qui converge vers une limite finie.
- **Suite divergente** : Une suite qui ne converge pas vers une limite finie. Elle peut tendre vers l'infini (positivement ou négativement) ou osciller.
- **Suite non définie** : Une suite dont les termes ne sont pas définis pour certaines valeurs de  $n$ .

## Chapitre 4 : Opérations sur les limites

### Limites de sommes, produits et quotients

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes de limites respectives  $l$  et  $l'$ , alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = l + l'$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = l \cdot l'$
- Si  $l' \neq 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$

### Limites et inégalités

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand, et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l'$ , alors  $l \leq l'$ .

## Chapitre 5 : Limites et comparaison de suites

### Théorème des gendarmes (ou théorème de comparaison)

Si  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont trois suites telles que  $u_n \leq v_n \leq w_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand, et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$ .

## Suites monotones et bornées

- Une suite est **monotone croissante** si  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tout  $n$ .
- Une suite est **monotone décroissante** si  $u_{n+1} \leq u_n$  pour tout  $n$ .
- Une suite est **bornée** si elle est majorée et minorée.

\*Théorème :\* Toute suite monotone et bornée converge.

## Chapitre 6 : Applications et suites définies par récurrence

### Résolution de problèmes impliquant des limites de suites

Les limites de suites sont utilisées pour résoudre de nombreux problèmes, notamment dans l'étude des fonctions, des équations différentielles et des probabilités.

### Étude de suites définies par récurrence

Pour étudier une suite définie par récurrence, on peut utiliser les méthodes suivantes :

- **Calcul des premiers termes** : Cela permet de se faire une idée du comportement de la suite.
- **Supposition d'une limite** : Si la suite semble converger, on peut supposer qu'elle a une limite  $l$  et essayer de la déterminer en utilisant la relation de récurrence.
- **Démonstration par récurrence** : On peut utiliser le principe de récurrence pour démontrer que la suite converge vers une limite donnée.

**Exemple** : Soit la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ . On peut montrer que cette suite converge vers 2.

## Résumé

- Une **suite numérique** est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- Une **suite arithmétique** a une raison  $r$  :  $u_n = u_0 + nr$ .
- Une **suite géométrique** a une raison  $q$  :  $u_n = u_0 \cdot q^n$ .
- La **limite** d'une suite  $(u_n)$  est  $l$  si  $|u_n - l| < \epsilon$  pour tout  $n > N$  et tout  $\epsilon > 0$ .  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$
- **Opérations sur les limites** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}$  (si  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n} \quad (\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \neq 0).$$

- **Théorème des gendarmes** : Si  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$ .
- Une suite **monotone et bornée** converge.
- Les suites définies par récurrence peuvent être étudiées par calcul des premiers termes, supposition d'une limite et démonstration par récurrence.

From:

<https://wikiprof.fr/> - wikiprof.fr

Permanent link:

[https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale\\_generale:mathematiques:suites\\_et\\_limites&rev=1751919456](https://wikiprof.fr/doku.php?id=cours:lycee:generale:terminale_generale:mathematiques:suites_et_limites&rev=1751919456)

Last update: 2025/07/07 22:17

