Suites et limites

Prérequis

Pour aborder ce cours sur les suites et les limites, il est essentiel de maîtriser les notions suivantes acquises au cours des classes précédentes :

- **Nombres réels :** Connaissance des propriétés des nombres réels, des opérations de base (addition, soustraction, multiplication, division) et de la représentation des nombres sur une droite numérique.
- **Fonctions :** Notions de base sur les fonctions, leur représentation graphique et leur vocabulaire (domaine de définition, image, antécédents).
- **Algèbre :** Maîtrise des manipulations algébriques de base (développement, factorisation, résolution d'équations et d'inéquations).
- **Notion d'indice :** Compréhension de l'utilisation des indices pour désigner les éléments d'une suite.
- **Ce cours se situe dans la partie “Nombre et Calcul” du programme de Terminale Générale, après l'étude des fonctions et avant l'introduction au calcul intégral.**

Chapitre 1 : Introduction aux suites numériques

Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et qui associe à chaque entier naturel n un nombre réel u_n. On note généralement une suite $\left(u_n\right)$.

- n est appelé l'**indice** de la suite.
- u_n est appelé le **terme général** de la suite.

- **Exemple :** La suite définie par $u_n=2n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ est une suite arithmétique. Les premiers termes de cette suite sont : $u_0=1$, $u_1=3$, $u_2=5$, $u_3=7$, etc.

Manières de définir une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite :

- **Par son terme général :** Comme dans l'exemple précédent, on donne une formule explicite pour calculer u_n en fonction de n.
- **Par récurrence :** On donne le premier terme u_0 (ou u_1) et une relation de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple : La suite de Fibonacci est définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Chapitre 2 : Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

Une suite $\left(u_n\right)$ est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que $u_{n+1}=u_n+r$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite arithmétique est donné par : $u_n=u_0+nr$.
- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par : $S_n=\frac{(n+1)}{(2)}\left(u_0+u_n\right)$.

Suites géométriques

$n\in\mathbb{N}$
Une suite $\left(u_n\right)$ est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que $u_{n+1}=qu_n$ pour tout . Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite géométrique est donné par : $u_n=u_0q^n$.
- La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique est donnée par : $S_n=u_0\frac{\left(1-q^{n+1}\right)}{(1-q)}$ si $q\neq1$.

Chapitre 3 : Limites d'une suite

Notion intuitive de limite

On dit qu'une suite $\left(u_n\right)$ converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang, les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l. On note alors $lim_{n\to\infty}u_n=l$.

Définition formelle de la limite

Une suite $\left(u_n\right)$ converge vers une limite l si, pour tout nombre réel $\epsilon>0$, il existe un entier N tel que pour tout $n>N$, on ait $|u_n-l|<\epsilon$.

Chapitre 4 : Opérations sur les limites

Limites de sommes et de produits

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites convergentes de limites respectives l et l, alors :

- $lim_{n\to\infty}\left(u_n+v_n\right)=l+l$
- $lim_{n\to\infty}\left(u_n.v_n\right)=l.l$

Limites de quotients

Si $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont deux suites convergentes de limites respectives l et l, avec l, alors :

$lim_{n\to\infty}\frac{\left(u_n\right)}{\left(v_n\right)}=(l)/$

Chapitre 5 : Suites monotones et bornées

Suites monotones

$n\in\mathbb{N}$ Une suite est dite **croissante** si $u_{n+1}\geqslant u_n$ pour tout . Elle est dite **décroissante** si $u_{n+1}\leqslant u_n$ $n\in\mathbb{N}$ pour tout .

Suites bornées

$n\in\mathbb{N}$
Une suite est dite **bornée** s'il existe un nombre réel M tel que $|u_n|\leqslant M$ pour tout .

Théorème de la convergence monotone

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Chapitre 6 : Limites et comparaison

Théorème de comparaison

Si $u_n\geqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $lim_{n\to\infty}v_n=l$, alors $lim_{n\to\infty}u_n=l$.

Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et si $lim_{n \to \infty} u_n = lim_{n \to \infty} w_n = l$, alors $lim_{n \to \infty} v_n = l$.

Chapitre 7 : Formes indéterminées

Les formes indéterminées

Certaines expressions impliquant des limites peuvent donner lieu à des **formes indéterminées**, c'est-à-dire des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

- $\frac{(0)}{(0)}$
- $\frac{(\infty)}{(\infty)}$
- $0.\infty$
- $\infty - \infty$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

Méthodes pour lever les formes indéterminées

Pour lever les formes indéterminées, on peut utiliser différentes méthodes, telles que :

- La factorisation
- La multiplication par un conjugué
- Le théorème de comparaison
- La règle de l'Hôpital (qui sera étudiée plus tard)

Chapitre 8 : Applications des suites et limites

Intérêt des suites

Les suites sont utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés tels que :

- La croissance démographique
- L'évolution d'un capital investi
- La décroissance radioactive
- L'approximation de nombres irrationnels

Exemples d'applications

Exemple 1 : Calculer la limite de la suite $u_n = \frac{\left(n^2+1\right)}{\left(2n^2-3\right)}$.

$$lim_{n \to \infty} \frac{\left(n^2+1\right)}{\left(2n^2-3\right)} = lim_{n \to \infty} 1 + frac \frac{(1)}{\left(n^2\right)} 2 - \frac{(3)}{\left(n^2\right)} = \frac{(1)}{(2)}.$$

Exemple 2 : Étudier la convergence de la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\right)}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}} = \frac{(1)}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}}.$$

$$lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Résumé

- Une **suite numérique** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$).
- Une suite **arithmétique** est définie par une raison r: $u_{n+1} = u_n + r$. Son terme général est $u_n = u_0 + nr$.
- Une suite **géométrique** est définie par une raison q: $u_{n+1} = q u_n$. Son terme général est $u_n = u_0 q^n$.
- La **limite** d'une suite $\left(u_n\right)$ est un nombre l tel que les termes de la suite se rapprochent de l lorsque n tend vers l'infini.
- Les **opérations sur les limites** permettent de calculer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites.
- Une suite **monotone** est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite **bornée** est une suite dont les termes sont compris entre deux bornes.
- Le **théorème de la convergence monotone** affirme que toute suite monotone et bornée est convergente.
- Le **théorème de comparaison** et le **théorème d'encadrement** permettent de déterminer la limite d'une suite en la comparant à d'autres suites.
- Les **formes indéterminées** sont des expressions dont la limite ne peut pas être déterminée directement.
- Les suites et les limites sont utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés.