

Applications du Logarithme Népérien

Énoncé : Un échantillon initial de 100g de carbone-14, un isotope radioactif utilisé pour la datation au carbone, est étudié. Le carbone-14 se désintègre selon la loi de décroissance radioactive :

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, où $N(t)$ est la quantité de carbone-14 restante après un temps t , N_0 est la quantité initiale, et λ est la constante de désintégration. On sait que la demi-vie du carbone-14 est de 5730 ans.

Questions

1. Déterminez la valeur de la constante de désintégration λ en années⁻¹.
2. Quelle quantité de carbone-14 restera après 1000 ans ?
3. Après combien de temps la quantité de carbone-14 sera-t-elle réduite à 25% de sa quantité initiale ?
4. Exprimez le temps en fonction de la quantité restante $N(t)$ et de la constante de désintégration λ .
5. Si un artefact contient 10g de carbone-14, quel est son âge estimé, en supposant qu'il n'y a pas eu d'apport supplémentaire de carbone-14 depuis sa formation ?

Corrigé

Question 1

La demi-vie $\frac{t_1}{2}$ est le temps nécessaire pour que la quantité de substance soit réduite de moitié. Donc, $N\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{1}{2}N_0$. On a : $\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda \frac{t_1}{2}}$ En prenant le logarithme népérien des deux côtés : $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda \frac{t_1}{2}$ $\lambda = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) / \frac{t_1}{2}$ Avec $\frac{t_1}{2} = 5730$ ans : $\lambda = \frac{\ln(2)}{5730} \approx 1.2097 \times 10^{-4}$ années⁻¹

Question 2

On utilise la formule de décroissance radioactive : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ Avec $N_0 = 100$ g, $t = 1000$ ans, et $\lambda \approx 1.2097 \times 10^{-4}$ années⁻¹ : $N(1000) = 100e^{-1.2097 \times 10^{-4} \times 1000} \approx 100e^{-0.12097} \approx 100 \times 0.8869 \approx 88.69$ g

Question 3

On veut trouver t tel que $N(t)=0.25N_0=\frac{1}{4}N_0$. $\frac{1}{4}N_0=N_0e^{-\lambda t}$ En prenant le logarithme népérien des deux côtés : $\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-\lambda t$ $t=-\ln\left(\frac{1}{4}\right)/\lambda=\frac{\ln(4)}{\lambda}=\frac{2\ln(2)}{\lambda}$ Avec $\lambda \approx 1.2097 \times 10^{-4}$ années⁻¹ : $t \approx \frac{2\ln(2)}{1.2097 \times 10^{-4}} \approx \frac{1.3863}{1.2097 \times 10^{-4}} \approx 11460 \text{ ans}$ Note : $t=2t_1=2 \times 5730=11460 \text{ ans.}$

Question 4

On part de $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ et on prend le logarithme népérien des deux côtés :

$$\ln(N(t))=\ln(N_0e^{-\lambda t})=\ln(N_0)+\ln(e^{-\lambda t})=\ln(N_0)-\lambda t=\ln(N_0)-\ln(N(t))=\ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)$$
$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)$$

Question 5

On a $N(t)=10 \text{ g}$, $N_0=100 \text{ g}$, et $\lambda \approx 1.2097 \times 10^{-4}$ années⁻¹.

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)=\frac{1}{1.2097 \times 10^{-4}}\ln\left(\frac{100}{10}\right)=\frac{1}{1.2097 \times 10^{-4}}\ln(10)$$
$$t \approx \frac{2.3026}{1.2097 \times 10^{-4}} \approx 19036 \text{ ans}$$

From:
<https://wikiprof.fr/> - **wikiprof.fr**

Permanent link:
https://wikiprof.fr/doku.php?id=exercices:lycee:general:terminale_generale:mathematiques:applications_du_logarithme_neperien&rev=1752169064

Last update: 2025/07/10 19:37

