

Applications du Logarithme Népérien

Énoncé : Un échantillon initial de 100g de carbone-14, un isotope radioactif utilisé pour la datation au carbone, est étudié. Le carbone-14 se désintègre selon la loi de décroissance radioactive :

$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, où $N(t)$ est la quantité de carbone-14 restante après un temps t , N_0 est la quantité initiale, et λ est la constante de désintégration. On sait que la demi-vie du carbone-14 est de 5730 ans.

Questions

- Déterminez la valeur de la constante de désintégration λ en années⁻¹.
- Quelle quantité de carbone-14 restera après 1000 ans ?
- Après combien de temps la quantité de carbone-14 sera-t-elle réduite à 25% de sa quantité initiale ?
- Exprimez le temps en fonction de la quantité restante $N(t)$ et de la constante de désintégration λ .
- Si un artefact contient 10g de carbone-14, quel est son âge estimé, en supposant qu'il n'y a pas eu d'apport supplémentaire de carbone-14 depuis sa formation ?

Corrigé

Question 1

La demi-vie $\frac{t_1}{2}$ est le temps nécessaire pour que la quantité de substance soit réduite de moitié. Donc,

$$N\left(\frac{t_1}{2}\right) = \frac{1}{2} N_0 \quad \text{On a : } \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda \frac{t_1}{2}} \quad \frac{1}{2} = e^{-\lambda \frac{t_1}{2}} \quad \text{En prenant le logarithme népérien des deux côtés :}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda \frac{t_1}{2} \quad \lambda = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2}{t_1} = \frac{\ln(2)}{\frac{t_1}{2}} \quad \text{Avec } \frac{t_1}{2} = 5730 \quad \text{ans :}$$

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{5730} \approx 1.2097 \times 10^{-4} \text{ années}^{-1}$$

Question 2

On utilise la formule de décroissance radioactive : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ Avec $N_0 = 100$ g, $t = 1000$ ans, et $\lambda \approx 1.2097 \times 10^{-4}$ années⁻¹ :

$$N(1000) = 100 e^{-1.2097 \times 10^{-4} \times 1000} \approx 100 e^{-0.12097} \approx 100 \times 0.8869 \approx 88.69 \text{ g}$$

Question 3

On veut trouver t tel que $N(t) = 0.25 N_0 = \frac{1}{4} N_0$. $\frac{1}{4} N_0 = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\lambda t}$ En prenant le logarithme népérien des deux côtés : $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\lambda t \Rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\lambda} = \frac{\ln(4)}{\lambda} = \frac{2\ln(2)}{\lambda}$ Avec $\lambda \approx 1.2097 \times 10^{-4}$

années⁻¹ : $t \approx \frac{2\ln(2)}{1.2097 \times 10^{-4}} \approx \frac{1.3863}{1.2097 \times 10^{-4}} \approx 11460 \text{ textans}$ Note : $t = 2t_1 = 2 \times 5730 = 11460$ ans.

Question 4

On part de $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ et on prend le logarithme népérien des deux côtés :

$$\ln(N(t)) = \ln(N_0 e^{-\lambda t}) = \ln(N_0) + \ln(e^{-\lambda t}) = \ln(N_0) - \lambda t \Rightarrow \lambda t = \ln(N_0) - \ln(N(t)) = \ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right)$$

Question 5

On a $N(t) = 10 \text{ g}$, $N_0 = 100 \text{ g}$, et $\lambda \approx 1.2097 \times 10^{-4}$ années⁻¹.

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N_0}{N(t)}\right) = \frac{1}{1.2097 \times 10^{-4}} \ln\left(\frac{100}{10}\right) = \frac{1}{1.2097 \times 10^{-4}} \ln(10)$$

$$t \approx \frac{2.3026}{1.2097 \times 10^{-4}} \approx 19036 \text{ textans}$$

From: <https://wikiprof.fr/> - wikiprof.fr

Permanent link: https://wikiprof.fr/doku.php?id=exercices:lycee:general:terminale_generale:mathematiques:applications_du_logarithme_neperien&rev=1752169222

Last update: 2025/07/10 19:40

