Exercice : Modélisation de la Décroissance Radioactive

Un échantillon initial de 100g de carbone-14, un isotope radioactif utilisé pour la datation au carbone, est étudié. Le carbone-14 se désintègre selon la loi de décroissance radioactive : $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, où $N(t)$ est la quantité de carbone-14 restante après un temps t, N_0 est la quantité initiale, et λ est la constante de désintégration. On sait que la demi-vie du carbone-14 est de 5730 ans.

Questions

1. Déterminez la valeur de la constante de désintégration λ en années^^\1^^.
2. Quelle quantité de carbone-14 restera après 1000 ans ?
3. Après combien de temps la quantité de carbone-14 sera-t-elle réduite à 25% de sa quantité initiale ?
4. Exprimez le temps en fonction de la quantité restante $N(t)$ et de la constante de désintégration λ.
5. Si un artefact contient 10g de carbone-14, quel est son âge approximatif, en supposant qu'il n'y a pas eu d'apport supplémentaire de carbone-14 depuis sa formation ?

Corrigé

Question 1

La demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ est le temps nécessaire pour que la quantité de substance soit réduite de moitié. Donc, $N\left(t_{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}N_0$. On a : $\frac{1}{2}N_0=N_0e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$ $\frac{1}{2}=e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$ En prenant le logarithme népérien des deux côtés : $lnleft\left(\frac{1}{2}\rightarrow\right)=-\lambda t_{\frac{1}{2}}$ $\lambda=-lnleft\left(frac\,\frac{1}{2}\rightarrow\right)t_{\frac{1}{2}}=\frac{\ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}}$ Avec $t_{\frac{1}{2}}=5730$ ans : $\lambda=\frac{\ln(2)}{5730}\approx1.2097.10^{-4}\ années^{-1}$

Question 2

On utilise la formule de décroissance radioactive : $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ Avec $N_0=100$g, $t=1000$ ans, et $\lambda\approx1.2097.10^{-4}$ années^^\1^^ : $N(1000)=100e^{-1.2097.10^{-4}.1000}\approx100e^{-0.12097}\approx100.0.8869\approx88.69\ g$

Question 3

On veut trouver t tel que $N(t)=0.25N_0=\frac{1}{4}N_0$. $\frac{1}{4}N_0=N_0e^{-\lambda t}$ $\frac{1}{4}=e^{-\lambda t}$ En prenant le logarithme népérien des deux côtés : $lnleft\left(\frac{1}{4}\rightarrow\right)=-\lambda t$ $t=-lnleft\left(frac\,\frac{1}{4}\rightarrow\right)\lambda=\frac{\ln(4)}{\lambda}=\frac{2\ln(2)}{\lambda}$ Avec $\lambda\approx1.2097.10^{-4}$

années^^\1^^ : $t \approx \frac{2\ln(2)}{1.2097.10^{-4}} \approx \frac{1.3863}{1.2097.10^{-4}} \approx 11460 \ ans$ Note : $2.t_{\frac{1}{2}} = 2.5730 = 11460$ ans, ce qui est logique.

Question 4

On part de $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. On prend le logarithme népérien des deux côtés : $\ln(N(t)) = \ln\left(N_0 e^{-\lambda t}\right) = \ln\left(N_0\right) + \ln\left(e^{-\lambda t}\right) = \ln\left(N_0\right) - \lambda t$ $\lambda t = \ln\left(N_0\right) - \ln(N(t)) = lnleft\left(\frac{N_0}{N(t)} \rightarrow\right)$ $t = \frac{1}{\lambda} lnleft\left(\frac{N_0}{N(t)} \rightarrow\right)$

Question 5

On a $N(t) = 10$g et $N_0 = 100$g. On veut trouver t. $t = \frac{1}{\lambda} lnleft\left(\frac{N_0}{N(t)} \rightarrow\right) = \frac{1}{\lambda} lnleft\left(\frac{100}{10} \rightarrow\right) = \frac{1}{\lambda}\ln(10)$ Avec $\lambda \approx 1.2097.10^{-4}$ années^^\1^^ : $t \approx \frac{\ln(10)}{1.2097.10^{-4}} \approx \frac{2.3026}{1.2097.10^{-4}} \approx 19035 \ ans$ L'âge approximatif de l'artefact est de 19035 ans.